בס"ד

אוניברסיטת אריאל

שם הקורס: מבנים דיסקרטיים למדעי המחשב

מס׳ קורס: 7017510-1

מרצה: ד״ר גונן מירה

העורך: משה חנוקוגלו

תאריך: תשע״ז סמ׳ ב׳

<u>לא כל ההגדרות והמשפטים נלמדו בהרצאה.</u>

הגדרות

1. <u>גרף פשוט</u> – גרף ללא לולאות, שבין כל שני קודקודים יש לכל היותר צלע אחת.
2. <u>מולטי גרף</u> – הוא גרף לא מכוון שבו יתכנו כמה צלעות בין אותו זוג קודקודים.
3. <u>פסאודו גרף</u> – הוא מולטי גרף שאפשר שיהיו בו לולאות. כאשר לולאה היא תלע מקודקוד לעצמו ({u,u}).
4. $\Gamma(u) = \{v \backslash \{u,v\} \in E\}$ – קבוצת כל השכנים של קודקוד u.
5. $\underline{degree(u)}$ – הדרגה של u, מספר הצלעות השונות שמכילות את u.
6. <u>במסלול פשוט</u> כל הקודקודים שונים זה מזה.
7. <u>מעגל פשוט</u> הוא מסלול פשוט שקודקודי הקצה שלו זהים.
8. <u>מרחק</u> בין שני קודקודים הוא אורך המסלול הקצר ביותר בניהם.
9. <u>קוטר</u> הוא המרחק הגדול ביותר.
10. <u>גרף נקרא קשיר</u> אם קיים מסלול בין כל שני קודקודים בגרף, אחרת הוא נקרא לא קשיר.
11. <u>רכיב קשירות</u> הוא קבוצה של קודקודים שקיים מסלול בין כל שני קודקודים באותו רכיב.
12. <u>תת גרף</u> של G הוא גרף שמקיים שקבוצת קודקודיו מוכלת בקבוצת הקודקודים של G (או שווה לה) וכן שקבוצת צלעותיו מוכלת בקבוצת הצלעות של G (או שווה לה), וכל קשת בתת הגרף מחברת שני קודקודים ששייכים לתת הגרף.
13. <u>תת גרף פורש</u> הוא תת גרף שכל הקודקודים של גרף המקור נמצאים בו.
14. <u>גרף שלם</u> (קליקה) הוא גרף פשוט עם קשת בין כל 2 קודקודים. מסומן k_n כאשר n זה מספר הקודקודים.
15. <u>גרף משלים</u> לגרף G הוא הגרף עם אותם קודקודים של G אך עם קבוצת הצלעות המשלימה של קבוצת הצלעות של G.
16. <u>n-קוביה</u> הוא גרף שהצמתים בו מיצגים מחרוזות בינאריות באורך n. שני צמתים מחוברים אם הם נבדלים בביט 1 בדיוק.
17. גרף יקרא <u>d-רגולרי</u> אם הדרגה של כל הקודקוד שלו שווה d. (בגרף השלם הדרגה של כל קודקוד בו היא n-1)
18. <u>גרף דו צדדי</u> הוא גרף שנתן לחלק את הקודקודים שלו לשתי קבוצות זרות כך שכל צלע בגרף מכילה קודקוד מכל אחת מהקבוצות. <u>גרף דו צדדי שלם</u> אם קיימות בו כל הצלעות האפשריות שמכילות קודקודים משתי הקבוצות הזרות של הקודקודים נסמן גרף שלם זה ב $k_{s,t}$ כאשר s,t הם הגדלים של קבוצות הקודקודים.
19. גרף לא מכוון שאינו מכיל מעגלים נקרא <u>יער</u>.
20. יער קשיר נקרא <u>עץ</u> ויסומן ב T_n כאשר n מספר הקודקודים.
21. קודקוד בעץ שדרגתו 1 נקרא <u>עלה</u>.
22. <u>גרף מישורי</u> הוא גרף שניתן לייצג אותו במישור מבלי שאף שתי צלעות יחתכו אחת את השנייה.
23. <u>פאה</u> – בהינתן ייצוג מישורי של גרף מישורי, כל אזור שחסום ע"י צלעות הגרף נקרא פאה. האזור שאינו חסום נקרא הפאה החיצונית.
24. <u>עידון של צלע</u> {v,u} הוא החלפת במסלול u-x-v באורך 2 כאשר x צומת חדש שמוסיפים לגרף.
25. <u>G' הוא העדנה</u> של G אם ניתן לקבל את G' מ G על ידי סידרה של עידון קשתות, כאשר מותר גם לעדן קשתות חדשות.
26. <u>מסלול אוילר</u> הוא מסלול לא בהכרח פשוט שעובר בכל צלע בגרף בדיוק פעם אחת.
27. <u>מעגל אוילר</u> הוא מעגל לא בהכרח פשוט שעובר בכל צלע בגרף בדיוק פעם אחת.
28. <u>זיווג</u> הוא קבוצה של קשתות שאין בה שתי קשתות שיש להם קודקוד משותף.
29. <u>זיווג בגרף דו צדדי</u> – קבוצה של צלעות בגרף דו צדדי כך שאין אף זוג צלעות עם קודקודים משותפים.
30. <u>זיווג מקסימום</u> הוא זיווג כזה שאין יותר גדול ממנו בגרף.
31. <u>זיווג מושלם</u> – אם כל הקודקודים בגרף משתתפים בזיווג, כלומר ניתן לבחור חלק מהצלעות בגרף כך שאין קודקודים משותפים בין הצלעות ובכל קודקוד חלה צלע אותה בחרנו.
32. <u>מסלול מתחלף</u> - זהו מסלול שכל הצלעות בו נמצאות לסירוגין בזיווג. כלומר כל צלע היא בזיווג \ לא בזיווג והצלע הבאה אחריה היא לא בזיווג \ בזיווג בהתאמה.

33. מסלול הרחבה לזיווג M – P הוא מסלול הרחבה של הזיווג M אם מתקיימים התנאים הבאים:

    1. הקודקוד הראשון והאחרון ב P לא מכוסים ע"י אף צלע בזיווג M.
    2. P הוא מסלול מתחלף.

34. מסלול המילטון מסלול פשוט העובר דרך כל קודקודי הגרף.
35. כיסוי בקשתות הוא קבוצת קשתות המכסה את כל צומתי הגרף.
36. כיסוי בצמתים הוא קבוצה של צמתים כך שכל קשת של הגרף סמוכה לקודקוד כלשהו בקבוצה.
37. צביעה של (קודקודי) גרף היא פונקציה בין קודקודי הגרף לבין קבוצה שאבריה נקראים צבעים או תגיות.
38. צביעה נאותה של גרף היא אם כל שני קודקודים סמוכים צבועים בצבעים שונים.
39. מספר הצביעה של הגרף G הוא מספר הצבעים **המינימלי** שצריך על מנת לצבוע את הגרף צביעה נאותה, ונסמנו $\chi(G)$. נאמר ש G הוא k צביע אם $\chi(G) \le k$.
40. גרף יקרא d מנוון אם בכל תת גרף שלו יש צומת מדרגה d לכל היותר.

משפטים שהוכחו בכתה בתורת הגרפים

ההערות שבסוגרים הם כיוון להוכחת הטענה.

1. מספר הדרגות בגרף לא מכוון שווה לפעמיים מספר הצלעות. (למת לחיצת הידיים)
$$\sum_{v\in V} degree(v) = 2|E|$$
2. בגרף לא מכוון יש מספר זוגי של קודקודים בעלי דרגה אי זוגית. (מסקנה מ 1)
3. בגרף קשיר לא מכוון עם n קודקודים יש לפחות n-1 צלעות. (אינדוקציה)
4. בגרף בעל $n \ge 3$ קודקודים ו- $m \ge n$ צלעות יש מעגל. (אינדוקציה)
5. יהיה G גרף קשיר לא מכוון ותהי צלע e אזי הגרף G\{e} קשיר **אם"ם** הצלע e שייכת למעגל פשוט כלשהו ב G (נניח צד אחד ונובע הצד השני)
6. גרף הוא דו צדדי **אם"ם** כל המעגלים בו (כולל אלו שאינם פשוטים) בעלי אורך זוגי. (טיול על המעגל, והנחה בשלילה)
7. כל עץ עם לפחות 2 קודקודים מכיל עלה. (טיול על הגרף)
8. מספר הצלעות בעץ בעל n קודקודים הוא n-1. (אינדוקציה)
9. גרף G הוא עץ **אם"ם** G קשיר מינימלי או G חסר מעגלים מקסימלי.
10. גרף קשיר עם n קודקודים ו n-1 צלעות הוא עץ.
11. גרף G הוא קשיר **אם"ם** יש ל G עץ פורש. (הסתכלות בתת גרף פורש מינימלי ב G)
12. נוסחת אוילר – יהי G גרף מישורי קשיר אזי n+f-m = 2 כאשר n – מספר הקודקודים בגרף, m - מספר הצלעות בגרף, f - מספר הפאות בגרף בייצוג המישורי של הגרף. (אינדוקציה על מספר הצלעות בגרף)
13. יהי G גרף מישורי קשיר עם $n \ge 3$ קודקודים ו m צלעות. אזי $m \le 3(n-2)$. (הוכחה ארוכה)
14. יהי G גרף מישורי קשיר חסר משולשים עם $n \ge 3$ קודקודים ו m צלעות. אזי
15. $m \le 2(n-2)$.
16. הגרף המלא עם חמישה קודקודים, k_5, אינו מישורי. (שימוש במשפט 13 ובכמות צלעות בגרף מלא)
17. הגרף הדו צדדי המלא על שתי קבוצות של 3 קודקודים $k_{3,3}$ אינו מישורי. (שימוש בנוסחת אוילר, כדי לדעת)
18. בכל גרף מישורי יש קודקוד בעל דרגה לכל היותר 5.
19. גרף מישורי **אם"ם** כל העדנה שלו היא גרף מישורי.
20. משפט Kuratowski, גרף הוא מישורי **אם"ם** הוא לא מכיל כתת גרף העדנה של k_5 או $k_{3,3}$.
21. $\chi(K_n) = n$.
22. $\chi(G) = 2$ **אם"ם** הוא כרף דו צדדי שמכיל לפחות קשת אחת.
23. אם G מעגל אז $\chi(G) = 2$ אם במעגל יש כמות זוגית של קודקודים, ואם יש כמות אי זוגית אז $\chi(G) = 3$.
24. כל גרף מישורי הוא 4 – צביע.

25. כל גרף מישורי הוא 5 – צביע.
26. כל גרף מישורי הוא 6- צביע. (אינדוקציה על מספר הקודקודים)
27. יהי G גרף קשיר לא מכוון, ב G יש מעגל אוילר **אם"ם** כל הדרגות של הקודקודים בגרף זוגיות. (הוכחה קצת יותר ארוכה)
28. יהי G גרף קשיר לא מכוון, ב G יש מסלול אוילר **אם"ם** כל הדרגות של הקודקודים בגרף זוגיות או שיש בדיוק שני קודקודים בעלי דרגה אי זוגית. (הוכחה קצרה, כדי לראות)
29. יהי G גרף קשיר לא מכוון שהדרגות של הקודקודים בו זוגיות גדולות מ 0 אז כל קודקוד ב G שייך למעגל כלשהו. (הוכחה קצת יותר ארוכה)
30. יהי G גרף קשיר מכוון, ב G יש מעגל אוילר **אם"ם** דרגת הכניסה של כל קודקוד בגרף שווה לדרגת היציאה שלו.
31. בזיווג מושלם עוצמת קבוצות הקודקודים משני צידי הגרף זהה. (עקרון שובך היונים)
32. משפט החתונה של Hall, בגרף דו צדדי שעוצמת קבוצות הקודקודים משני הצדדים שווה יש זיווג מושלם **אם"ם** לכל קבוצה S שחלקית לקבוצה אחת של קודקודים (מצד אחד של הגרף) מתקיים $|\Gamma(S)| \geq |S|$. (עקרון שובך היונים, אינדוקציה)
33. אם G הוא גרף דו צדדי d-רגולרי אזי קיים בו זיווג מושלם.
34. מהגדרה 28 ושני תנאיה נובע שהזיווג M אינו זיווג מקסימלי, ניתן לבחור את הזיווג המשלים שכולל את הצלע הראשונה והאחרונה והוא בהכרח גדול יותר.
35. מסלול הרחבה אינו חייב לכלול את כל צלעות הזיווג והוא עדין יהיה מסלול הרחבה.
36. משפט Berge, בגרף Gבעל זיווג M קיים זיווג אחר N כך שעוצמתו של N גדולה מעוצמתו של M **אם"ם** קיים מסלול הרחבה ל M. (קצת ארוך)
37. בגרף n-קובייה יש מעגל המילטון כאשר $n \geq 2$. (אינדוקציה)
38. משפט Ore, יהי G גרף פשוט בעל לפחות $n \geq 3$ קודקודים כך שלכל זוג צמתים v, u שאינם שכנים מתקיים $degree(u) + degree(v) \geq n$ אז הוא המילטוני.
39. משפט Dirac, יהי G גרף פשוט בעל לפחות $n \geq 3$ קודקודים, אם הדרגה של כל צומת היא לפחות $\frac{n}{2}$ אז הוא המילטוני.

נוסחאות קצרות

מספר הצלעות בגרף שלם לא מכוון הוא $\binom{n}{2}$.

מספר הצלעות בגרף דו צדדי שלם הוא s*t כאשר s,t הם גדלי קבוצות הקודקודים.