

שם הקורס: חשבון אינפיניטסימלי 2

מס' קורס: 7016310-1

מרצה: ד"ר אשכנזי יהודה

העורך: משה חנוקוגלו

תאריך: תשע"ז סמ' ב'

2..... אינטגרל לא אמיתי

3..... טורים

3..... טורי מספרים

4..... טורי חזקות

4..... טורי מקלורן וטיילור

5..... טורי פורייה

7..... פונקציות במספר משתנים

7..... הקדמה

8..... פירוט נושאים

13..... אינטגרלים כפולים ומשולשים

13..... אינטגרל כפול

14..... אינטגרל משולש

15..... אינטגרל קווי

16..... רוטור ודיוורגנס

17..... גרפים שכדי להכיר

אינטגרל לא אמיתי

שלב א:

מציאת נק' סינגולריות וחלוקה לסכום לאינטגרליים כך שבכל אינטגרל יהיה מקסימום נק' סינגולריות אחת. (נקודות סינגולריות היא או נק' אי הגדרה או $\pm\infty$).

שלב ב:

פתרון כל אחד מהאינטגרליים.

שם/מקרה	ביצוע	הערות
אינטגרציה/קל לבצע אינטגרל	ביצוע אינטגרל רגיל	
$\int_{-\infty}^a \frac{1}{x^\alpha} dx$ או $\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$	$\alpha > 1$ מתכנס $\alpha \leq 1$ מתבדר	תנאי הכרחי להתכנסות: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ וכן ב $-\infty$.
$\int_b^\infty a^x dx$	$0 < a < 1$ מתכנס $a \geq 1$ מתבדר	
$\int_{-\infty}^b a^x dx$	$0 < a \leq 1$ מתבדר $a > 1$ מתכנס	
$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx$	$\alpha < 1$ מתכנס $\alpha \geq 1$ מתבדר	אם מתקיים: מספר סופי $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$ אז האינטגרל מתכנס.
$0 < f(x) < g(x)$	אם $g(x)$ מתכנס אז גם $f(x)$ מתכנס. אם $f(x)$ מתבדר אז גם $g(x)$ מתבדר.	נק' הסינגולריות משותפת ל $f(x)$ ול $g(x)$.
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = d$ $d \neq 0, \pm\infty$	אם אחד מתכנס אז גם השני מתכנס, ואם אחד מתבדר אז גם השני מתבדר.	a נק' הסינגולריות משותפת ל $f(x)$ ול $g(x)$.
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \pm\infty$	זה שקול למקרה: $0 < f(x) < g(x) : 0$ $0 < g(x) < f(x) : \pm\infty$	a נק' הסינגולריות משותפת ל $f(x)$ ול $g(x)$.
$\int_a^b f(x) dx$ מתכנס בהחלט אם $\int_a^b f(x) dx$ מתכנס		

$$\int_a^b f(x) - g(x) dx = \int_a^c f(x) - g(x) dx + \int_c^b f(x) - g(x) dx$$

במקרה: אם אחד האינטגרליים מתבדר אז גם המקורי מתבדר.

$$\int_a^b f(x) - g(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

אך במקרה: לא מספיק שאחד האינטגרליים יתבדר על מנת שהמקורי גם כן יתבדר.

עצות:

- אם הגבול באין סוף אז אפשר בחלק מהמקרים לבצע ה"זנחות" (שזה בעצם מבוסס על המבחן השלישי-מלמטה בטבלה שלעיל).
- אם שני קצוות האינטגרל הם סופיים אז נוכל להציב את נקודת הסינגולריות בכל הגורמים שהם כופלים את הפונקציה אך ששונים מאפס ושלא הם גרמו לנקודת סינגולריות.
- כפל בצמוד יעזור לרוב במקרים של הפרש בין שורשים.

טורי מספרים

טורים אלו מתחלקים לשתי קבוצות:

1. אפשר לחשב את סכום הטור.
2. אי אפשר לחשב את סכום הטור.

הדרכים לחישוב סכום הטור:

- אם הטור הנדסי $\sum_{n=k}^{\infty} a * q^n$ אזי $\begin{cases} \frac{a_1}{1-q}, & -1 < q < 1 \\ \pm\infty, & |q| \geq 1 \end{cases}$ אין גבול, $q = -1$
- אם הטור חשבוני וגבולות סופיים $\sum_{n=a}^b a + n * d$ $S = \frac{n*[2a_1+(n-1)d]}{2}$
- אם טור הינו טור טלסקופי, טור שבו בד"כ יהיה הפרש בין איברים (או שיהיה אפשר להביא אותו למצב הזה, למשל בשימוש בשברים חלקיים, פירוק סוגריים וכו') כך שמכל הטור יישארו איברים בודדים בהתחלה ובסוף (גודל ההפרש בין האינדקסים הכלליים שווה לכמות האברים שיישארו בהתחלה וכמות האיברים שנשארו בסוף שווה לכמות שנשארו בהתחלה), אז נוכל לחשב את סכום האיברים שנשארו בהתחלה ובסוף.
- לדוגמא: $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n} * \frac{1}{n-2}$ בטור זה יהיו 2 איברים בהתחלה ושנים בסוף.
- אם הטור הינו פיתוח של פונקציה לפי מקלורן או טיילור אז הטור שווה לפונקציה שבפונקציה, להבדיל מהטור, אין תלות באין סוף גורמים אלא צריך רק להציב מספר סופי של פרמטרים כדי לקבל את הסכום.

אך בטורים שאי אפשר לחשב את סכומם, אנו נבדוק אם הם מתכנסים או מתבדרים.

תנאי הכרחי להתכנסות של הטור $\sum a_n$ הוא $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

כדי לבדוק אם הפונקציה מתכנסת או מתבדרת (ולא לבדוק את סכום הטור) נוכל להשתמש בטבלה לקמן:

שם/מקרה	ביצוע	הערות
מבחן האינטגרל	$\int_a^\infty a_x dx \approx \sum a_n$	בהינתן טור חיובי $a_n \searrow 0$ נקי הסינגולריות היחידה של האינטגרל היא ב ∞ . ואחרי שמעבירים לאינטגרל אז אפשר להשתמש בכל מבחני האינטגרל.
מבחן המנה	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ $\begin{cases} 0 \leq q < 1, \text{ הטור מתכנס} \\ q > 1, \text{ הטור מתבדר} \\ q = 1, \text{ לא ידוע} \end{cases}$	
מבחן השורש	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ $\begin{cases} q < 1, \text{ הטור מתכנס} \\ q > 1, \text{ הטור מתבדר} \\ q = 1, \text{ לא ידוע} \end{cases}$	
$0 \leq a_n \leq b_n$ לקראת ∞ לכל n.	אם $\sum b_n$ מתכנס אז גם $\sum a_n$ מתכנס. אם $\sum a_n$ מתבדר אז גם $\sum b_n$ מתבדר.	
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = d$ $d \neq 0, \pm\infty$	$\sum a_n \approx \sum b_n$	
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = d$ $d = 0, \pm\infty$	$0 \leq a_n \leq b_n : 0$ $0 \leq b_n \leq a_n : \pm\infty$	
$\sum a_n$ מתכנס בהחלט אם $\sum a_n $ מתכנס	אם טור מתכנס בהחלט אז הוא גם מתכנס	טור שמתכנס, אבל לא מתכנס בהחלט אז הוא מתכנס בתנאי.
מבחן לייבניץ	אם $a_n \searrow 0$ והטור הוא $\sum (-1)^{kn+L} a_n$ הטור מתכנס בתלות ב-k.	אם k אי זוגי אזי הטור מתחלף ומתאים ללייבניץ. אם k זוגי אזי הטור לא מתאים ללייבניץ. $\cos(\pi n) = (-1)^n$

נוסחת סטרלינג: $n! \approx \frac{n^n}{e^n} * \sqrt{2\pi n}$

נוסחה לכפל כל האי זוגיים עד n: $\frac{(2n)!}{n! * 2^n}$ (במחנה הוא כפל כל הזוגיים עד n).

טורי חזקות

הגדרה: הטור $\sum (mx + b)^{kn+L} a_n$ נקרא טור חזקות סביב $\frac{-b}{m}$ (kn+L חייב להיות חיובי)

בכדי לחפש את קטע ההתכנסות או נבצע מבחן המנה או מבחן השורש על ערך מוחלט של הטור

על מנת שהטור יתכנס צריך שהוא יקיים את: $-1 < mx + b < 1 \leftarrow \frac{1-b}{m} < x < \frac{-1-b}{m}$ עבור ה-x שעבורו הגבול קטן מ-1.

את קצוות הקטע אנחנו נצטרך לבדוק בנפרד (לא יעזור לנו לעשות מבחן המנה או השורש כיוון שיצא בהם 1)

בבדיקת קצוות הקטע אנחנו נציב כל פעם בטור את ערך ה-x אותו אנחנו רוצים לבדוק כקצה, ואז נבצע בדיקת התכנסות לטור כמו טור מספרים רגיל (כיוון שב-x הצבנו את ערך הגבול) עם כל השיטות שהוזכרו בטבלה.

טורי מקלורן וטיילור

(את הטורים "הפשוטים" יש בסוף הספר של יהודה)

טורים אלו נותנים לנו לחשב ערך של פונקציות מבלי לחשב את הפונקציות.

טור מקלורן הוא מקרה פרטי של טור טיילור.

טור מקלורן: $f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(0) \cdot x^n}{n!}$ כאשר $f^{(n)}(0)$ זו הנגזרת ה- n -ית של הפונקציה.

מציאת הטור:

1. מציאת צורה כללית לנגזרת ה- n -ית של הפונקציה.
2. נציב 0 ב- x של הנגזרת ונשאר רק עם n בנגזרת הכללית.
3. נציב בנוסחה של מקלורן ונקבל את הטור.

משפט: נניח ש- $f(x) = \sum a_n \cdot (x-a)^n$ ונניח שהקטע הסגור $[b,c]$ נמצא כולו בתוך קטע ההתכנסות של הטור אז:

$$\int_b^c f(x) dx = \int_b^c \sum a_n \cdot (x-a)^n dx = \sum \int_b^c a_n \cdot (x-a)^n dx$$

וכן אפשר לעשות בגזירת הצדדים, אם ידוע ש- $f(x) = \sum a_n \cdot (x-a)^n$ אזי אפשר לומר גם

$$(f(x))' = (\sum a_n \cdot (x-a)^n)' = \sum (a_n \cdot (x-a)^n)'$$

אך צריך לשים לב שאחרי שעושים אינטגרציה או גזירה אז גודל התחום נשמר אל לא בהכרח שהשוויון בקצוות נשמר.

הערה: אפשר להכפיל ולחלק ב- x (בתנאי ששונה מאפס) וגם להכניסו לסכום אם הוא לא תלוי ב- x , דבר זה עוזר לפעמיים להגיע לצורה הרצויה.

משפט טיילור: תהי $f(x)$ גזירה אין סוף פעמיים ב- a אז $f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(a) \cdot (x-a)^n}{n!}$.

שיטת הפתרון היא להעביר את הטור לטור מקלורן ע"י שנגדיר $t = x-a \leftarrow x = t+a$ ואת x נציב חזרה ונמשיך לפתח את הפונקציה לפי טור מקלורן.

הערה: במקרה של טורים מתחלפים שמתנהגים לפי הכללים של מבחן לייבניץ, נוכל לחשב קרובים של פונקציות בנקודה מסוימת או קרוב של סכום הטור ע"י שנסכום את כל איברי הטור עד שנגיע לאיבר שערכו קטן מערך הדיוק שאנו רוצים, ושם נעצור את הסכימה.

$$S = \sum_{m=0}^n (-a)^m a_m \text{ כאשר מתקיים } |a_{n+1}| < d$$

הערה: עם הפיתוחים האלו נוכל למצוא סכום של טורים (כמוזכר לעיל) וכן נוכל באותה דרך למצוא גבולות של פונקציות ע"י שנעשה גבול לטור שאליו הפונקציה שווה.

טורי פורייה

טורים אלו הם תאור של פונקציות בעזרת סינוסים וקוסינוסים.

הגדרה: נתונה פונקציה $f(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ כאשר $f(x)$ ורציפה בקטע $[a,b]$ אזי $F(x)$

תהיה מתוארת בעזרת סינוסים וקוסינוסים ויהיה לה מחזור $b-a$ כך שתקיים $F(x) = f(x)$ בקטע $[a,b]$.

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) \right)$$

$$a_n = \frac{2}{b-a} * \int_a^b f(x) * \cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} * \int_a^b f(x) * \sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) dx$$

ובמקרה פרטי שהתחום הוא $[-\pi, \pi]$ אז הנוסחה היא:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$n \geq 1 \quad a_n = \frac{1}{\pi} * \int_{-\pi}^{\pi} f(x) * \cos(nx) dx$$

$$n \geq 1 \quad b_n = \frac{1}{\pi} * \int_{-\pi}^{\pi} f(x) * \sin(nx) dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} * \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

במקרה והתחום הוא רק $[0, \pi]$ אז נבצע הרחבה זוגית או אי זוגית של $f(x)$.

הרחבה זוגית :

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx))$$

$$n \geq 1 \quad a_n = \frac{2}{\pi} * \int_0^{\pi} f(x) * \cos(nx) dx$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} * \int_0^{\pi} f(x) dx$$

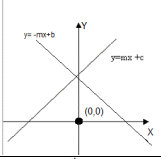
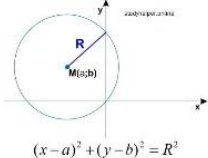
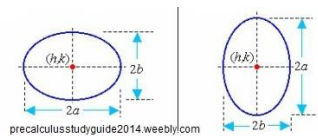
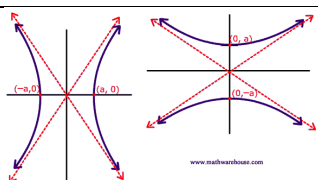
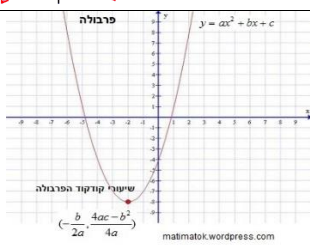
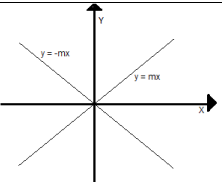
הרחבה אי זוגית :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \sin(nx))$$

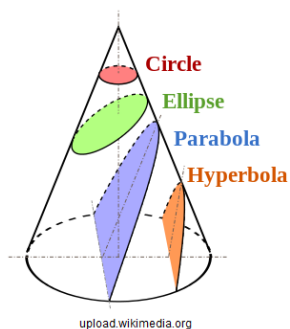
$$b_n = \frac{2}{\pi} * \int_0^{\pi} f(x) * \sin(nx) dx$$

הקדמה

צריך להכיר כמה פונקציות חשובות ואת הגרף שלהן.

שם	פונקציה	איור	הערות
ישר	$y = ax + b$		אם $a > 0$ אז עולה אם $a < 0$ אז יורד
מעגל	$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$		(a,b) זה מרכז המעגל
אליפסה	$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$		זה מרכז האליפסה (h,k) אם $a > b$ אז האליפסה "שוכבת" אם $b > a$ אז האליפסה "עומדת"
היפרבולה	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$		אם המשוואה $x - y$ אז הגרף על ציר ה- x אם המשוואה $y - x$ אז הגרף על ציר ה- y
פרבולה	$y = ax^2 + bx + c$		אם $a > 0$ אז הפרבולה "שמוחה" אם $a < 0$ אז הפרבולה "עצובה"
איחוד של שני ישרים	$y^2 = m^2 * x^2$		נוצרים שני ישרים, $y = mx$ $y = -mx$

כל הגרפים האלו הם באים לתאר חתכים של חרוט



פירוט נושאים

בנושא של פונקציות במספר משתנים ישנם כמה תתי נושאים:

1. נגזרות חלקיות ונגזרות מכוונות.
 2. כלל השרשרת.
 3. המישור המשיק.
 4. ישר הנורמל.
 5. הדיפרנציאל השלם.
 6. גרדיאנט.
 7. נקודות קיצון מקומיות ומוחלטות בכפוף לאילוץ או בלעדיו.
- נתחיל לפי הסדר.

נגזרות חלקיות ונגזרות מכוונות:

נגזרות חלקיות:

הגדרה: נתון $z = f(x, y)$, אז הנגזרת החלקית לפי x (בלי הגבלת הכלליות) כאשר מציבים בה את הנקודה (x_0, y_0, z_0) שווה לשיפוע של המשטח בנקודה זו בכיוון המקביל לציר ה- x בכיוון החיובי שלו. נגזרת זו תסומן f'_x .

על מנת לחשב את f'_x (בלי הגבלת הכלליות) נגזור את $f(x, y)$ לפי x מה שאומר שרק x הוא משתנה וכל השאר נחשבים קבועים.

ביצוע גזירה של פונקציה סתומה, כשגוזרים פונקציה סתומה אנו נגזור לפי x אך להבדיל מפונקציה מפורשת, פה אנו נגזור תמיד גם את z . ואחרי סיום הגזירה (אם יהיה צורך בכך) נבודד את z' ואז נמצא את הנגזרת של הפונקציה לפי x .

$$\text{לדוגמא: } (x^3y + z^2 = 3xz)' \leftarrow 3x^2y + 2zz' = 3z + 3xz'$$

כפי שאנו יודעים לפעמיים צריך לגזור גם פעם שניה ושלישית וכי' את הגזירות בצורה כללית אנו נסמן כך f''_{xx} , כמות הגרשיים זה מספר הגזירות והאותיות שכתובות בצד ימין למטה אלו המשתנים שגזרנו על פיהם, מה שאומר שאם היה כתוב f'''_{xyx} אז גזרנו שלוש פעמיים – פעמיים לפי x ופעם אחת לפי y . (סדר הגזירה לא משנה, לא משנה אם קודם כל פעמיים גזרנו לפי x ואז לפי y או בכל צורה אחרת, העיקר שיישאר אותו כמות של גזירות לפי כל משתנה).

$$\text{משתנה). וצורה אחרת לסמן } f'''_{xyx} \text{ היא } \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$$

נוסחה: נתונה פונקציה סתומה $f(x, y, z) = 0$ אז $\frac{-f'_x}{f'_z} z'_x = \frac{-f'_y}{f'_z} z'_y = \frac{-f'_z}{f'_z} z'_z = -1$ נחשב משתנה וכל השאר קבועים, f'_y רק y נחשב משתנה וכל השאר קבועים, f'_z רק z נחשב משתנה וכל השאר קבועים.

נגזרות מכוונות:

הגדרה: נגזרת מכוונת בנקודה מסוימת נותנת את השיפוע של המשטח לכיוון שאותו מראה הנגזרת.

הכיוונים יכולים להינתן בשלוש צורות:

1. וקטור אלגברי
2. וקטור גאומטרי
3. זווית בכיוון החיובי של ציר ה- x .

פתרון עם וקטור אלגברי:

הערה: וקטור מנורמל הוא וקטור שהאורך שלו הוא 1.

בכדי להגיע מכל וקטור לוקטור מנורמל באותו כיוון נבצע נירמול.

$$\text{לדוגמא: נתון וקטור } \vec{U} = (u_1, u_2) \text{ אז הנורמל של וקטור זה הוא } \bar{U} = \frac{(u_1, u_2)}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \text{ ולכן הנירמול הוא } \frac{(u_1, u_2)}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} = \left(\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}, \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \right)$$

הערה: נתונים שני וקטורים $\vec{U} = (u_1, u_2)$ ו- $\vec{V} = (v_1, v_2)$ החיבור והחיסור ביניהם כך:

$$\bar{U} \pm \bar{V} = (u_1 \pm v_1, u_2 \pm v_2)$$

נתון וקטור אלגברי $\bar{U} = (u_1, u_2)$ שהוא מנורמל (ראה פירוט לעיל) אזי,

$$f'_{\bar{U}} = u_1 * f'_x(x_0, y_0) + u_2 * f'_y(x_0, y_0)$$

אם נתונות נקודות ההתחלה והסוף של הוקטור אז כדי ליצר את הוקטור עצמו אנו נחסר מהסוף את ההתחלה, כך: $\bar{U} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$, ואז נבצע נירמול וקיבלנו וקטור יחידה בכיוון הרצוי שאורכו 1.

(אם נתון לנו וקטור גאומטרי הכוונה שנתונות לנו שתי נקודות ואנו צריכים לחסר ביניהם כמו לעיל)

אם נתון לנו הזווית הרצויה α (מעלות) אז $f'_\alpha = \cos(\alpha) * f'_x(x_0, y_0) + \sin(\alpha) * f'_y(x_0, y_0)$

כלל השרשרת:

במקרה ונתונה לנו פונקציה $z = f(x, y)$ וגם x, y תלויים ב- t וגם $x = f(t)$ וביקשו לחשב את $\frac{dz}{dt}$

ישנם שתי שיטות:

1. להציב במקום x, y את ערכם כתלות ב- t .
2. ע"י הנוסחה: $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}(t) * \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}(t) * \frac{dy}{dt}$. הביטוי $\frac{\partial z}{\partial x}(t)$ הכוונה היא לגזור את הפונקציה

$z = f(x, y)$ לפי x ואז בנגזרת נציב את הערך של x לפי t (ובצורה דומה $\frac{\partial z}{\partial y}(t)$ עם y).

ובביטוי $\frac{dx}{dt}$ הכוונה היא לגזור את $x = f(t)$ לפי t (ובצורה דומה $\frac{dy}{dt}$ עם y).

המישור המשיק:

המישור המשיק זהו מישור שמשיק לפונקציה בנקודה אחת (ולפעמיים גם ביותר מנקודה אחת).

נתונה הפונקציה $z = f(x, y)$ אזי משוואת המישור המשיק לה בנקודה (x_0, y_0, z_0) היא:

$$z - z_0 = z'_x(x_0, y_0) * (x - x_0) + z'_y(x_0, y_0) * (y - y_0)$$

אם נתונה הפונקציה בצורה סתומה $f(x, y, z) = 0$ אזי המשוואה היא:

$$0 = f'_x(x_0, y_0, z_0) * (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0, z_0) * (y - y_0) + f'_z(x_0, y_0, z_0) * (z - z_0)$$

הערה: אם נתון מישורים מקבילים p, q בצורה $ax + by + cz = d$

אזי המקדמים של p הם לכל היותר כפולה בסקלר של המקדמים של q . ש: $q: a'x + b'y + c'z = d'$ כך ש: $p||q$ אזי המקדמים של p הם לכל היותר כפולה בסקלר של המקדמים של q . שזה אומר $a' = ma, b' = mb, c' = mc$ (את a', b', c' נוכל למצא ע"י נגזרת ונקודה כמפורט לעיל) אנו נוכל להשתמש במשוואות אלו אם נצטרך למצוא את המישור או את נקודת ההשקה וכדומה. ומשוואה נוספת שנוכל להשתמש בה היא שנקודת ההשקה מקיימת את משוואת המישור.

ישר הנורמל:

הצגת הישר המרחב היא $(x, y, z) = \underbrace{(x_0, y_0, z_0)}_{\text{נקודה במרחב}} + t * \underbrace{(a, b, c)}_{\substack{\text{וקטור} \\ \text{כיוון}}}$

הצגת הישר כמשוואה היא $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$

כמו כן הישר המאונך למישור $ax + by + cz = d$ הוא (a, b, c) .

ובעצם הישר הנורמל למישור מקביל הוא (f'_x, f'_y, f'_z) ונקודה על המישור (כל נקודה בנקודה) (x_0, y_0, z_0) (יכול להיות נקודה ההשקה)

הדיפרנציאל השלם:

משוואתו של הדיפרנציאל השלם היא: $dz = z'_x(x_0, y_0)dx + z'_y(x_0, y_0)dy$

אחד השימושים של הדיפרנציאל השלם הוא לחישוב קרובים.

כאשר נתונה לנו משוואה בצורה כללית $z = f(x, y)$ ואנו צריכים לחשב אותה בנקודה מסוימת וחשוב זה קשה לביצוע, אנו נחשב את הפונקציה בנקודה (x_0, y_0) זו הנקודה הכי קרובה לנקודה שמבקשים לחשב, אך אותה (את הנקודה החדשה) אנו יודעים לחשב בקלות בתוך הפונקציה.

אז נוכל למצוא את הקירוב הסופי ע"י שימוש בנוסחה $z = z(x_0, y_0) + dz$. כאשר z הוא הקירוב לפונקציה המבוקשת בנקודה המבוקשת.

הערה: $dx = x - x_0$ וכן $dy = y - y_0$.

גרדיאנט:

הגדרה: הגרדיאנט הוא הווקטור שמצביע על הכיוון שבו מתקבלת הנגזרת המכוונת המקסימלית.

(הכיוון שבו יש למשטח את השיפוע הגדול ביותר, יוצא מזה שבדיוק בכיוון הנגדי לגרדיאנט נמצא השיפוע המינימלי).

הגרדיאנט יסומן: $\nabla F(x_0, y_0) = \text{grad}(F(x_0, y_0)) = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0))$.

אם אנו רוצים לקבל ממש את השיפוע המקסימלי בנקודה זו (ולא רק את הכיוון) אז הוא מתקבל כך:

$$\|\nabla F(x_0, y_0)\| = \sqrt{(f'_x(x_0, y_0))^2 + (f'_y(x_0, y_0))^2}$$

ועל מנת לקבל את השיפוע המינימלי: $-\|\nabla F(x_0, y_0)\|$.

נקודות קיצון מקומיות ומוחלטות בכפוף לאילוץ או בלעדיו:

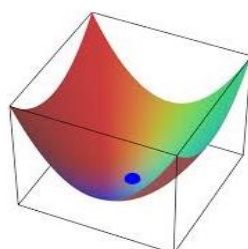
בהינתן לנו פונקציה שמתארת משטח במרחב אנו נרצה למצוא את נקודות הקיצון המקומיות, המוחלטות ונקודות קיצון שנמצאות על המישור בקטע מסוים (בין עם על קו מסוים ובין עם בשטח מסוים על המישור).

נקודות קיצון מקומיות:

ע"מ למצוא את נקודות הקיצון המקומיות – נקודות שבהן יש סביבה שלמה ואפילו הקטנה ביותר שבה הפונקציה רק יורדת או רק עולה (תלוי אם זה מינימום או מקסימום). בנקודות אלו המישור המשיק להן יהיה מקביל למישור xy .

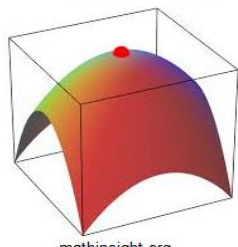
$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \text{ ע"מ למצוא נקודות אלו אנו נצטרך לפתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

בפתרון של מערכת זו אנו יכולים לקבל כמה סוגים של נקודות קריטיות:



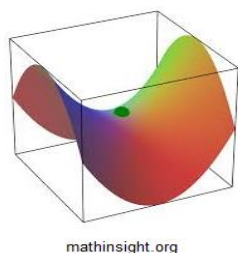
mathinsight.org

מינימום



mathinsight.org

מקסימום



אוכף

המיון מתבצע בשני שלבים :

1. מציאת הנקודות הקריטיות ע"י פתרון מערכת המשוואות שהוצגה לעיל, משם אנו מקבלים את ערכי ה x, y של הנקודות הקריטיות, את ערכי ה z אנו נקבל אחרי שנציב בפונקציה את ערכי ה x, y שקיבלנו.
2. מיון הנקודות, אנו נבנה טבלה

	(x_0, y_0)	...	(x_n, y_n)
$A f''_{xx}$	$f''_{xx}(x_0, y_0)$		$f''_{xx}(x_n, y_n)$
$B f''_{xy}$	$f''_{xy}(x_0, y_0)$		$f''_{xy}(x_n, y_n)$
$C f''_{yy}$	$f''_{yy}(x_0, y_0)$		$f''_{yy}(x_n, y_n)$
$D = A \cdot C - B^2$	חישוב התוצאות לעיל.		חישוב התוצאות לעיל.

אם D יוצא שלילי אז זו נקודת אוכף, אך אם D יוצא חיובי תלוי מה הערך של A אם A חיובי זה מינימום ואם A שלילי זה מקסימום.

הערה: אם D יצא שווה לאפס אזי אנו לא יודעים לקבוע איזו נקודה זו.

הערה: אם ישנה רק נקודה קריטית אחת והיא קיצון מקומי ו D גדול מאפס לכל x, y אז היא גם קיצון מוחלט.

נקודות קיצון של פונקציה בכפוף לאילוץ:

נקודות קיצון בכפוף לאילוץ הכוונה שאנו מחפשים נקודות קיצון (בד"כ) על איזשהו קו או שטח מוגדר שנמצא על המישור ורק עלהם ולא מעניין אותנו מה יש מחוץ לקו/שטח זה.

נפריד בין שני מקרי פתרון :

1. כאשר קל לחלץ את אחד המשתנים מין האילוץ.
2. לא קל לחלץ את אחד המשתנים מין האילוץ.

במקרה הראשון, אנו נחלץ את אחד המשתנים מהאילוץ ונציב אותו בפונקציית המטרה (הפונקציה של המישור). וישיאר לנו בפונקציית המטרה רק משתנה אחד ואז את פונקציית המטרה נחקור כמו כל פונקציה עם משתנה אחד. ולא לשכוח למצוא חזרה את המשתנה השני וכן את z .

במקרה השני, אנו נשתמש בפונקציית לגרנז', הפונקציה תראה כך :

$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda * g(x, y)$ כאשר f זו פונקציית המטרה ו g זו פונקציית האילוץ אחרי שאנו מאבירים את כולה לצד אחד.

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{מציאת נקודות הקיצון תתבצע ע"י פתרון מערכת המשוואות הבאה :}$$

(עזרה : אנו נוכל לבדוד את λ משתי המשוואות העליונות ואז יישארו שתי משוואות עם שני נעלמים)

מיון הנקודות מתבצע ע"י פתרון הדטרמיננטה לקמן לכל אחת מהנקודות בנפרד.

$$\begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = h \quad \text{אם } 0 < h \text{ זה מקסימום מקומי ואם } 0 > h \text{ זה מינימום מקומי.}$$

נקודות קיצון מוחלטות:

נקודות קיצון מוחלטות אלו נקודות שהן הכי גבוהות או הכי נמוכות על המישור (אנו לרוב נחפש אותן בשטח מוגדר כדוגמת עיגול מצולע וכו' (קו סגור פשוט) או בקטע מוגבל פתוח)

אם נתונה לנו פונקציה וצריך לחפש את נקודות המינימום והמקסימום המוחלטות שלה בשטח מוגדר אז אנו נחלק את החיפוש לשני חלקים, הראשון יהיה חיפוש בתוך השטח הזה והשני יהיה על הגבול של השטח הזה.

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$$

את שלב א' נקבל ע"י פתרון

את שלב ב' אנו נקבל ע"י מציאת נקודות קיצון שעל הצלעות וזה מתבצע כמו מציאת נקודות קיצון עם אילוץ כך **שכל צלע תפתר בנפרד**. (אם הגבול הוא מעגל או שקשה לבודד משתנה אחד מהאילוץ אז אנו נכניס את הגבול הזה לפונקציית לגרנז').

ואז אנו נמצא לכל נקודת את ערך ה z שלה והנקודות עם הערך z הגדול ביותר יהיו מקסימום מוחלט ועם הערך הקטן ביותר יהיו מינימום מוחלט (יכולים להיות כמה נקודות מינימום מוחלטות אם יש להן את אותו ערך וכמה מקסימום מוחלטות אם יש להן את אותו ערך).

אינטגרל כפול

הגדרה: אם נתון $0 \leq f(x, y)$ עבור כל $(x, y) \in D$ אזי $\iint_D f(x, y) dx dy$ לנפח הכלוא בין תחום (הנוצר בידי קו סגור פשוט) על המשטח שנוצר ע"י $f(x, y)$ לבין מישור xy .

אינטגרל חוזר כפול: זהו אינטגרל כפול על פונקציה בת שתי משתנים. נתון לנו אינטגרל $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$ אזי אנו קודם נעשה לפונקציה אינטגרל לפי y בתחום $[c, d]$ כאשר x יחשב כקבוע ואז נעשה לתוצאה אינטגרל לפי x בתחום $[a, b]$.

הערה: אם האינטגרל הפנימי הוא על y אז הגבולות של האינטגרל הזה יכולים להיות פונקציה של x והגבולות של האינטגרל החיצוני יהיו קבועים. ואם האינטגרל הפנימי הוא על x אז הגבולות של האינטגרל הזה יכולים להיות פונקציה של y והגבולות של האינטגרל החיצוני יהיו קבועים.

ואם שני הגולות הם קבועים ולא נעלמים אזי אנו יכולים להחליף את סדר האינטגרציה,

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

התחום של האינטגרל הכפול יסומן כך: $D = \{(x, y) | x \text{ תחום של } y, y \text{ תחום של } x\}$.

ואז את האינטגרל אנו נכתוב $\iint_D f(x, y) dx dy$.

את האינטגרל אנו יכולים לבצע בשתי צורות, או מאופקית או אנכית:

1. אופקית, $D = \{(x, y) | a \leq y \leq b, g(y) \leq x \leq h(y)\}$.

$$\text{ואז, } \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx dy$$

2. אנכית, $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$.

$$\text{ואז, } \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx$$

כאשר אנו מתחילים לחשב את השטח דבר ראשון כדי לנו להסתכל כיצד לחלק את חישוב האינטגרל, לפעמים אנו נוכל בפעם אחת לחשב את כל האינטגרל, אך יהיו פעמים שלא נוכל לבצע חישוב אחד על כל השטח ואז אנו צריכים לחלק את החישוב של השטח. בשלב זה אנחנו יכולים לקבוע ש- x יהיה בתחום של מספרים קבועים ו- y יהיה בתחום המוגדר ע"י פונקציות של x או להפך. לרוב, החלטה כיצד לחשב תהיה תלויה בבחירת הפותר ולכן הוא יוכל לבחור כיצד לחלק את השטח (בשביל זה אנחנו נצטרך לדעת לפחות כיצד נראים בגרפים הפשוטים כדי שיהיה יותר קל לקבל מבט נכון על התרגיל, ואותם אני מצרף בסוף).

במקרה וקיבלנו תרגיל ואנחנו רואים כקשה מאוד או בלתי אפשרי לנו לפתור את האינטגרל יעזור לפעמיים לשנות את סדר האינטגרציה ואז זה לפעמיים מקל מאוד את האינטגרציה.

כדי לשנות את סדר האינטגרציה אנחנו נצטרך לראות מה המקרה, אם נתון לנו ש- y נתון בתחום שהוא פונקציה של x ו- x נתון בתחום של קבועים אז אנחנו נכתוב את x בתחום שתלוי בפונקציות של y ואת y נכתוב בתחום של מספרים קבועים (בשביל לבצע את ההחלפה בצורה יותר קלה אנחנו יכולים לצייר את הפונקציות ולראות את התחומים של x ו- y). ובצורה סימטרית ומקבילה אם נתון לנו ש- x נתון בתחום שהוא פונקציה של y ו- y נתון בתחום של קבועים. אם כל הגבולות הם מספרים קבועים אז אפשר להחליף את סדר האינטגרציה כמפורט לעיל.

טענה: $\iint_D a dx dy = a * S(D)$ כאשר $S(D)$ הוא השטח של D .

החלפת משתנים באינטגרל כפול:

בכל החלפה אנחנו נעבור ממצב $\iint_D f(x, y) dx dy$ למצב $\int_a^b \int_c^d f(x(r, t), y(r, t)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, t)} dr dt$ כאשר

$$D = \begin{cases} x = x(r, t), & c \leq r \leq d \\ y = y(r, t), & a \leq t \leq b \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}$$

האיבר נקרא יעקוביאן והוא שווה ל-

ישנם כמה סוגים של החלפות משתנים:

- מעבר לקואורדינטות פולריות: $D = \begin{cases} x = r \cos(\theta) , & 0 \leq r \leq R \\ y = r \sin(\theta) , & a \leq \theta \leq b \end{cases}$ וידוע ש- R הוא רדיוס המעגל שמגיד לנו את השטח, a הקצה הקרוב לציר ה- x של הגזרה שבה אנו מתעסקים ו- b הוא הקצה הרחוק מציר ה- x של הגזרה שבה אנו מתעסקים. לדוגמא: אם אנו מתעסקים עם הרביע השלישי אז $a = \pi$ ו- $b = \frac{3\pi}{2}$. ואם רוצים את כל העיגול אז $a = 0$ ו- $b = 2\pi$ ואם רוצים טבעת בין שני עיגולים אז $R_1 \leq r \leq R_2$ כאשר R_1 זה רדיוס המעגל הפנימי ו- R_2 זה רדיוס המעגל החיצוני. והיעקוביאן שווה ל- r .
- כאשר נתון לנו עיגול $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2$ אז אנחנו נציב
- $D = \begin{cases} x = a + r \cos(\theta) , & 0 \leq r \leq R \\ y = b + r \sin(\theta) , & a \leq \theta \leq b \end{cases}$
- הגדרות r, θ כמו לעיל. והיעקוביאן שווה ל- r .
- כאשר נתון לנו אליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ אז אנחנו נציב
- $D = \begin{cases} x = a * r \cos(\theta) , & 0 \leq r \leq 1 \\ y = b * r \sin(\theta) , & a \leq \theta \leq b \end{cases}$
- הגדרות r, θ כמו לעיל. והיעקוביאן שווה ל- abr .

אינטגרל משולש

אינטגרל חוזר משולש: זהו אינטגרל משולש על פונקציה בת שלושה משתנים. נתון לנו אינטגרל $\int_a^b \int_c^d \int_k^m f(x, y, z) dz dy dx$ אזי אנו קודם נעשה לפונקציה אינטגרל לפי z בתחום $[k, m]$ כאשר x, y נחשבים לקבועים ואז נעשה אינטגרל לפי y בתחום $[c, d]$ כאשר x יחשב כקבוע ואז נעשה לתוצאה אינטגרל לפי x בתחום $[a, b]$.

הערה: אם האינטגרל הפנימי הוא על z אז הגבולות של האינטגרל הזה יכולים להיות פונקציה של x ו- y והגבולות של האינטגרל האמצעי – אינטגרל על y – יכולים להיות פונקציה של x , והגבולות של האינטגרל החיצוני יהיו קבועים. ובצורה כללית, הגבולות של האינטגרל הפנימי יכולים להיות פונקציה של כל המשתנים שמחוץ לאינטגרל הפנימי, והגבולות של האינטגרל האמצעי יכולים להיות פונקציה של המשתנים שמחוץ לאינטגרל האמצעי, ותמיד הגבולות של האינטגרל החיצוני ביותר יהיו מספרים ולא נעלמים.

ואם שלושת הגבולות הם קבועים ולא נעלמים אזי אנו יכולים להחליף את סדר האינטגרציה,

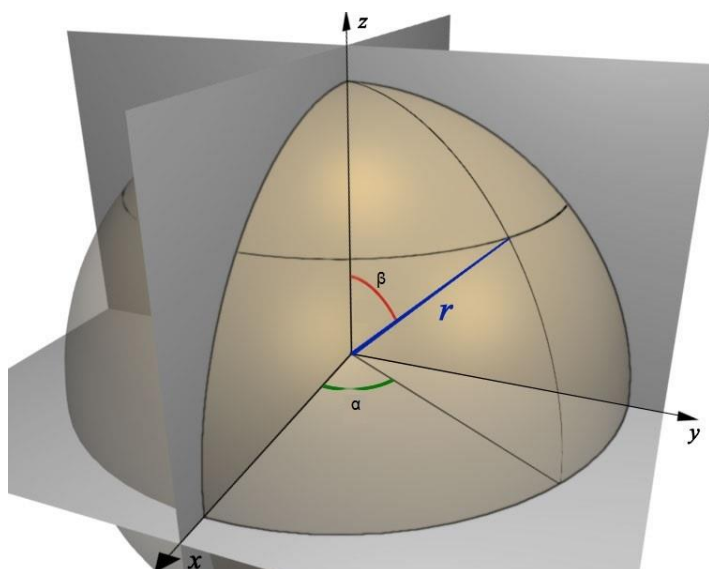
$$\int_a^b \int_c^d \int_k^m f(x, y, z) dz dy dx = \int_k^m \int_a^b \int_c^d f(x, y, z) dy dx dz$$

התחום של האינטגרל הכפול יסומן כך: $D = \{(x, y, z) | x \text{ תחום של } x, y \text{ תחום של } y, z \text{ תחום של } z\}$.

ואז את האינטגרל אנו נכתוב $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$.

גם באינטגרל משולש ישנה אפשרות של החלפת משתנים:

קורדינטות כדוריות: **(לפי ההסבר הראשון של יהודה אשכנזי, ולא לפי הדף נוסחאות)** נגדיר בטא β , α ו- r כך ש- α תהיה הזווית של היקף הכדור ו- β תהי הזווית של גובה הכדור ו- r יהיה הרדיוס של הכדור. כמפורט בתמונה



והיעקוביאן הוא $r^2 \cos(\beta)$. והתחום של α יכול להיות מ-0 ועד 2π , התחום של β יכול להיות מ- $-\frac{\pi}{2}$ ועד $\frac{\pi}{2}$ (אם β תקבל את כל התחום הזה אזי אנחנו נקבל את כל גובה הכדור) ו- r יכול להיות מ-0 ועד גודל הרדיוס.

אינטגרל קווי

אינטגרל קווי יתואר כך: $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ כאשר L הוא קו כלשהו.

L יכול להיות נתון לנו בשתי צורות:

1. $y = f(x)$. x כפונקציה של x . (ויכול להיות שיהיה נתון את x כפונקציה של y ואז ינתן לנו גם הטווח של y).

2. x נתון כפונקציה של t , y נתון כפונקציה של t לרוב ינתן לנו טווח של t . (יהיה נתון: $x=x(t)$, $y=y(t)$).

במקרה הראשון, אנחנו יכולים להציב בכל מקום שכתוב y את $f(x)$ ובמקום dy , נוכל לגזור את שני האגפים של $y = f(x)$ ולמצוא לכמה dy שווה ולהציב. ועכשיו יש לנו אינטגרל על פונקציה במשתנה אחד. (הפוך במקרה של x כפונקציה של y).

במקרה השני, אנחנו נציב במקום x את $x(t)$ ובמקום y את $y(t)$ וכדי מצא את dx , dy אנחנו נגזור את $x=x(t)$ ו- $y=y(t)$ וגם אותם נוכל להציב בתוך האינטגרל שלנו ויהיה לנו אינטגרל על פונקציה במשתנה אחד.

אם באינטגרל שנתון לנו מתקיים: $P'_y = Q'_x$ (אזי השדה $(P(x, y), Q(x, y))$ יקרא שדה משמר וכן זה תנאי הכרחי על מנת ש- $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ יהיה הדיפנציאל השלם של $f(x, y)$).

במקרה ותנאי הזה מתקיים אז זה אומר לנו שהאינטגרל אינו תלוי במסלול אלא רק נקודות ההתחלה והסוף חשובות לנו. אם הדרך לא חשובה לנו אלא רק נקודות ההתחלה והסוף אז אנחנו נוכל ליצור את הדרך בין שתי הנקודות בצורה שהכי נוחה לנו, ההמלצה של יהודה הייתה: אם נתון שנקודת ההתחלה היא (a, b) ונקודת הסיום היא (c, d) אז:

$$L_1 = \begin{cases} dx = 1dt \\ dy = 0 \end{cases} \text{ כן } a \leq t \leq c \text{ וכן } L_2 = \begin{cases} dx = 0 \\ dy = 1dt \end{cases} \text{ כן } b \leq t \leq d$$

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{L_1} P(t, b)dt + \int_{L_2} Q(c, t)dt$$

שזה אומר ללכת מקביל לציר ה- x מהנקודה שנתונה לנו עד ל- x של נקודת היעד, ואז ללכת משם מקביל לציר ה- y עד שנגיע לנקודת היעד.

משפט גרין:

הערה: במקרה ו- L הוא קו סגור אז נסמן את האינטגרל כך: $\oint_L$.

המשפט עצמו, נניח ש- L הוא קו סגור פשוט והוא שפה של תחום סגור D אז:

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D (Q'_x - P'_y) dxdy$$

ה- x (נגד כיוון השעון, אך אם החישוב הוא עם כיוון השעון אז האינטגרל על D הוא: $\iint_D P'_y - Q'_x dxdy$).

טיפ: אם נתון שטח קו L לא סגור אז אנחנו יכולים לסגור אותו עם קו L_1 ולהשתמש במשפט גרין ואז לחסר מהתוצאה את האינטגרל הקווי על L_1 .

רוטור ודיורגנס

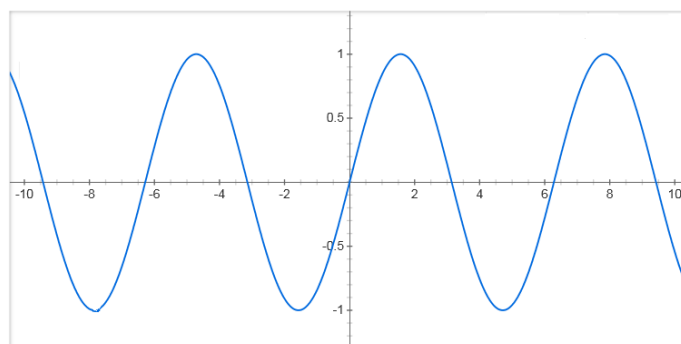
נתון שדה ב- R^3 : $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z) * \vec{i} + Q(x, y, z) * \vec{j} + R(x, y, z) * \vec{k}$

הגרדיאנט הוא $\nabla F = (P'_x, Q'_y, R'_z)$.

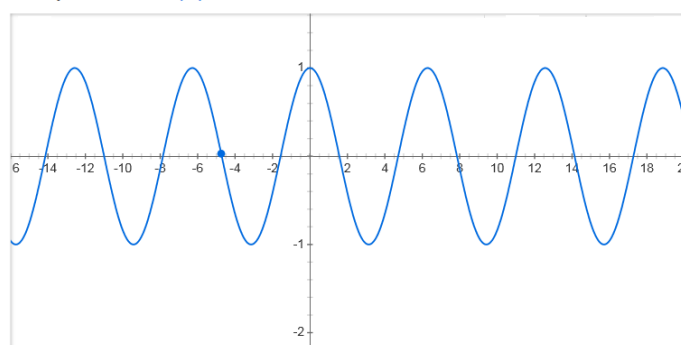
הדיוורגנס הוא $\text{div} F = P'_x + Q'_y + R'_z$.

הרוטור הוא $\text{curl} F = \text{rot} F = \nabla \times F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) * \vec{i} + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) * \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) * \vec{k}$

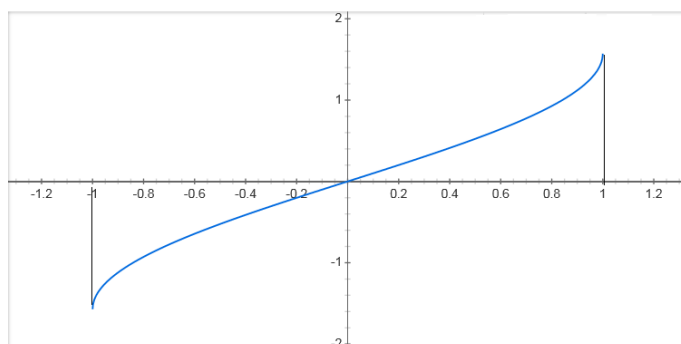
Graph for $\sin(x)$



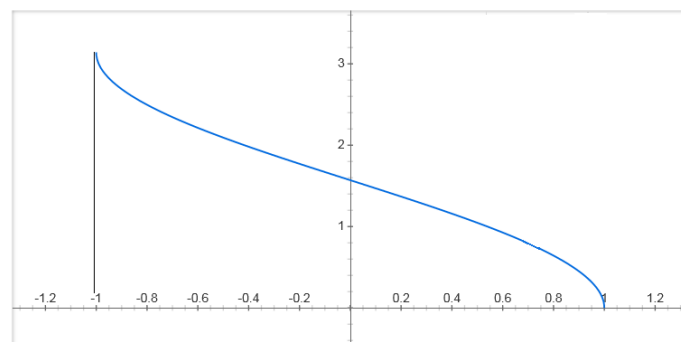
Graph for $\cos(x)$



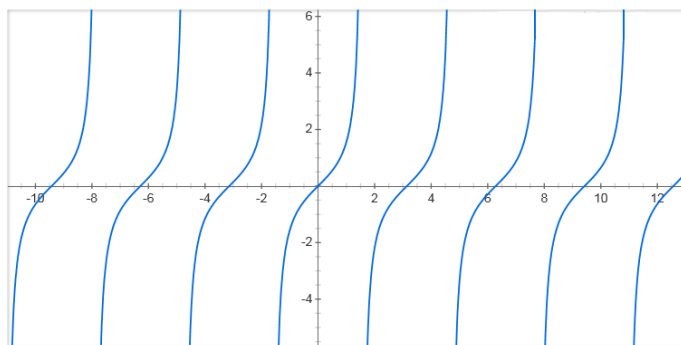
Graph for $\arcsin(x)$



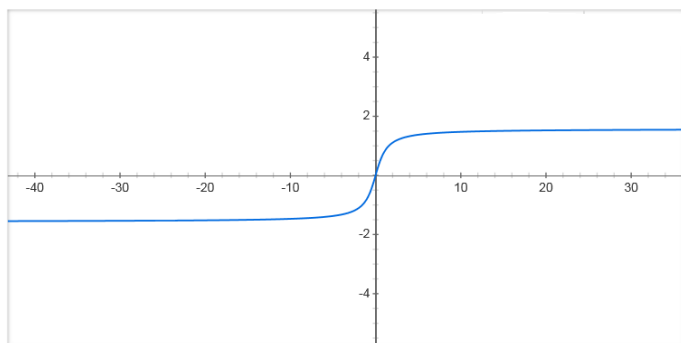
Graph for $\arccos(x)$



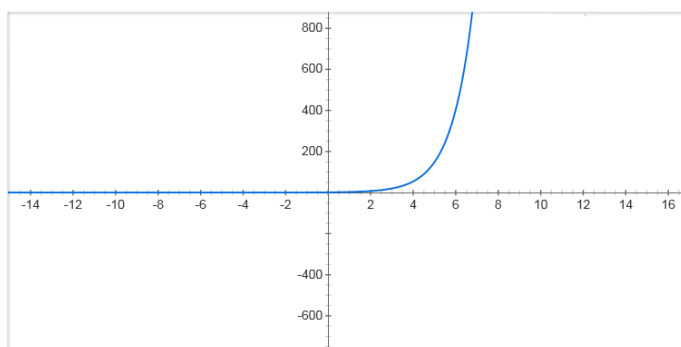
Graph for $\tan(x)$



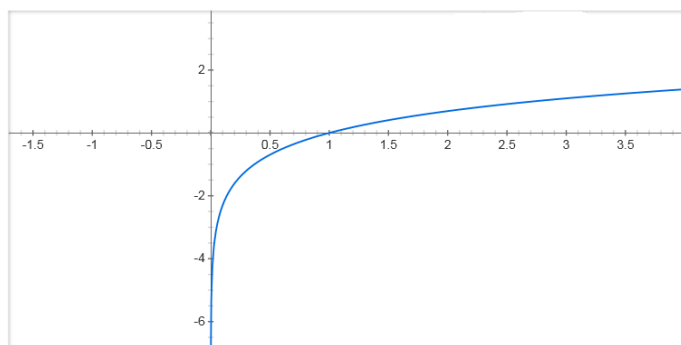
Graph for $\arctan(x)$



Graph for e^x



Graph for $\ln(x)$



Graph for x^3

