יסודות קוונטים

ע"פ הרצאותיו של אלון באב"ד - אוניברסיטת תל אביב

מרץ 2024

ע"פ הרצאותיו של אלון באב"ד

1 מכניקה קלאסית

1.1 סימונים

- תנע p
- מסה m
- מהירות $\dot{r}(t) = v$
- כח F
- תאוצה A

1.2 נוסחאות

- מצב של חלקיק מתואר ע"י הוקטור המיקום $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$
  מהירות $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$
  תאוצה $\ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$
- משוואת תנועת החלקיק $F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv)$
- כאשר המסה קבועה בזמן $F = \ddot{r}m$
- מאזן אנרגיה $\leftarrow$ אנרגיה = אנרגיה קינטית + אנרגיה פוטנציאלית
- $E_k = \frac{1}{2}m|\dot{r}|^2 = \frac{|\dot{p}|^2}{2m} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$

2 מכניקה קוונטית

2.1 סימונים

- קבוע פלנק המצומצם $\hbar = \frac{h}{2\pi} = \frac{1}{2h}\dot{6}.626\dot{1}0^{-34}\dot{J}\dot{s}$
- פוטון $\leftarrow$ אור בעל יחידה אחת של $\hbar\omega$

2.2 נוסחאות

- לפי תורת היחסות של אינשטיין הקשר בין אנרגיה לתנע ומסה של חלקיק הוא $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$
- לחלקיק עבור $\frac{v}{c} << 1$ התנע מספיק קטן כך ש $p^2c^2 << m^2c^4$ מקבלים $E = mc^2$
- לפוטון אין מסה ולכן מתקיים $E = pc$ ועם הנוסחה $E = \hbar\omega$ מקבלים $p = \hbar\frac{\omega}{c} \equiv \hbar k$ כאשר $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ו λ זה אורך גל

2.2.1 שלושת החוקים של ניוטון

1. **חוק ההתמדה**
כל גוף ממשיך במצב מנוחתו או בתנועה קצובה בקו ישר, אלא אם כן יאלץ לשנות מצב זה על ידי כוחות הכפויים עליו $\vec{a} = 0$ כל עוד מתקיים $\sum \vec{F} = 0$
2. **חוק התאוצה**
השינוי בתנועה הוא תמיד פרופורציונלי לכח המופעל, ובכיוון הקו הישר שממנו הכוח הופעל
$F = ma$
3. **חוק הפעולה והתגובה**
כאשר גוף מפעיל כוח כלשהו על גוף אחר, הגוף האחר יפעיל כוח השווה בעוצמתו אך מנוגד בכיוונו על הגוף הראשון $\overrightarrow{F_{1,2}} = -\overrightarrow{F_{2,1}}$

2.2.2 משוואת גל ושרדינגר

- פונקציית הגל המישורי, במימד אחד $\psi(x,t) = A_0e^{i(kx-\omega t)}$
לפי עיקרון הדואליות שמקיים $k = \frac{p}{\hbar}; \omega = \frac{E}{\hbar}$ נקבל $\psi(x,t) = A_0e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}$
- משוואת שרדינגר - מתארת התנהגות של חלקיק מיקרוסקופי בכל מסה
$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = (-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + v)\psi$

3 מרחב וקטורי לינארי

הגדרה: מרחב וקטורי לינארי בנוי משני רכיבים

1. וקטורים לדוגמא $|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle$
2. סקלרים לדוגמא a, b

ומתקיים בו הכללים הבאים

- סגירות לפעולות חיבור וכפל בסקלר
$|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\gamma\rangle$ שייך למרחב
$a|\alpha\rangle = |\delta\rangle$ שייך למרחב
- $|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\beta\rangle + |\alpha\rangle$
- $|\alpha\rangle + (|\beta\rangle + |\gamma\rangle) = (|\alpha\rangle + |\beta\rangle) + |\gamma\rangle$
- $a(|\alpha\rangle + |\beta\rangle) = a|\alpha\rangle + a|\beta\rangle$
- $(a+b)|\alpha\rangle = a|\alpha\rangle + b|\alpha\rangle$
- $a(b|\alpha\rangle) = (ab)|\alpha\rangle$
- קיים וקטור $|0\rangle$ יחודי כך שלכל וקטור מתקיים $|\alpha\rangle + |0\rangle = |\alpha\rangle$
- לכל וקטור $|\alpha\rangle$ קיים וקטור הופכי יחודי $|-\alpha\rangle$ כך שמתקיים $|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle = |0\rangle$
- $|-\alpha\rangle = -|\alpha\rangle$
- $0|\alpha\rangle = |0\rangle$
- $1|\alpha\rangle = |\alpha\rangle$

3.1 מכפלה פנימית

הגדרה: מכפלה פנימית של שני וקטורים $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ היא מספר מרוכב שנסמן $\langle\alpha|\beta\rangle$ עם התכונות הבאות

- $\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^*$
- $0 \geq \langle\alpha|\alpha\rangle$ מספר ממשי חיובי
- $\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0 \Leftrightarrow |\alpha\rangle = 0$
- $\langle\alpha|(b|\beta\rangle + c|\gamma\rangle) = b\langle\alpha|\beta\rangle + c\langle\alpha|\gamma\rangle$

הגדרות

- שני וקטורים $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ הם אורטוגונלים, א"ג, אם מתקיים $\langle\alpha|\beta\rangle = 0$
- נורמה של וקטור $\|\alpha\| = \sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle}$
- וקטור $|\alpha\rangle$ מנורמל אם מתקיים $\|\alpha\| = 1$
- בסיס של וקטורים יקרא אורתונורמלי, א"נ, אם מתקיים עבור על שני וקטורים בקבוצה זו $\{|\alpha_i\rangle\}$ מתקיים
$$\langle\alpha_i|\alpha_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

3.2 כללים

- אם בסיס הוא א"נ ונתון $|\alpha\rangle = \sum_{i=1}^n a_i|i\rangle; |\beta\rangle = \sum_{i=1}^n b_i|i\rangle$ אזי מתקיים $\langle\alpha|\beta\rangle = \sum_{i=1}^n a_i^* b_i$
- במקרה לעיל מתקיים $\langle\alpha|\alpha\rangle = \sum_{i=1}^n |a_i|^2$
- אי שיוויון שוורץ $|\langle\alpha|\beta\rangle| \leq \|\alpha\|\|\beta\|$
- אי שיוויון המשלוש $\|\alpha+\beta\| \leq \|\alpha\|\|\beta\|$
- כאשר $|j\rangle$ הינו וקטור בסיס מתקיים $\langle j|\alpha\rangle = \sum_i a_i\langle j|i\rangle = \sum_i a_i\delta_{ij} = a_j$
- $I = \sum_i |i\rangle\langle i| = \sum_i \mathbb{P}_i$
- שימוש מאוד נפוץ ב I שמקיים את $I|\alpha\rangle = \sum_i |i\rangle\langle i||\alpha\rangle = |\alpha\rangle$ שנקרא יחס השלמות

3.3 אופרטורים לינארית

הגדרה: אופרטור לינארי מופעל על וקטור והתוצאה היא וקטור אחר במרחב $\Lambda|\alpha\rangle = |\alpha^{'}\rangle$

3.3.1 כללים

- $\Lambda(a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle) = a\Lambda|\alpha\rangle + b\Lambda|\beta\rangle$ בצורה דומה על מרחב ARB
- סימון: $[A, B] \triangleq AB - BA$
- אופרטור הופכי ל Λ יסומן כ Λ^{-1} ויקיים $\Lambda\Lambda^{-1} = \Lambda^{-1}\Lambda = I$
כאשר I הוא אופקטור הזהות $\forall|\alpha\rangle I|\alpha\rangle = |\alpha\rangle$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3.3.2 ייצוג מטריצי של אופרטורים

- נסמן את האופרטור כ Λ ובנוסף $\Lambda|i\rangle = |i^{'}\rangle$
- $|\Lambda\alpha\rangle \triangleq \Lambda|\alpha\rangle = \sum_i \alpha_i|i^{'}\rangle$
- $\langle j|i^{'}\rangle = \langle j|\Lambda|i\rangle \triangleq \Lambda_{ji}$
- אופרטור ההיטל $|i\rangle\langle i| = \mathbb{P}_i \leftarrow \mathbb{P}_i|\alpha\rangle = a_i|i\rangle$

3.3.3 אופרטור צמוד

- נסמן את האופרטור הצמוד כ $\Lambda^\dagger$
- $\langle\alpha\Lambda| \triangleq \langle\alpha|\Lambda^\dagger$
- $(\Lambda^\dagger)_{ij} = \langle i|\Lambda^\dagger|j\rangle = \langle\Lambda i|j\rangle = \langle j|\Lambda i\rangle^* = \langle j|\Lambda|i\rangle^*$
- $(\Lambda^\dagger)_{ij} = (\Lambda_{ij})^*$
- $(\Lambda^\dagger)^\dagger = \Lambda$
- $\langle\Lambda\Omega\alpha| = \langle\alpha|\Omega^\dagger\Lambda^\dagger \leftarrow (\Lambda\Omega)^\dagger = \Omega^\dagger\Lambda^\dagger$

3.3.4 אופרטור הרמיטי

הגדרה: אופרטור Λ הוא הרמיטי אם מתקיים $\Lambda^\dagger = \Lambda$

- $\langle\Lambda\alpha|\beta\rangle = \langle\alpha|\Lambda^\dagger|\beta\rangle = \langle\alpha|\Lambda|\beta\rangle = \langle\alpha|\Lambda\beta\rangle$
- כולם אופרטורים הרמיטים $\Lambda\Lambda^\dagger; \Lambda + \Lambda^\dagger; i(\Lambda - \Lambda^\dagger)$
- אופרטורים הרמיטים מקיימים $[\Lambda, \Lambda^\dagger] = 0$ ולכן הם אופרטורים נורמלים

3.3.5 אופרטור יוניטרי

הגדרה: אופרטור Λ הוא יונטרי אם מתקיים $\Lambda^\dagger\Lambda = \Lambda\Lambda^\dagger = I$. יסומנו לרוב ע"י U

- $\Lambda^\dagger = \Lambda^{-1}$
- אופרטורים יוניטרים מקיימים $[\Lambda, \Lambda^\dagger] = 0$ ולכן הם אופרטורים נורמלים
- אופרטורים יוניטרים משמרים מכפלה פנימית $\langle U\beta|U\alpha\rangle = \langle\beta|U^\dagger U|\alpha\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle$
- עוזר בפעולות בין בסיסים שונים $\langle i|\Lambda|j\rangle \overset{NewBase}{\rightarrow} \langle i'|\Lambda|j'\rangle = \langle i|U^\dagger\Lambda U|j\rangle$ כלומר במקום להחליף בסיס נוכל לשנות רק את האופרטורים ולהשתמש באותו בסיס
- $det(U) = e^{i\Theta}; det(U^\dagger) = e^{-i\Theta}$
- $det(U\Lambda U^\dagger) = det(\Lambda)$

3.4 ערכים עצמיים, ע"ע, ווקטורים עצמיים, ו"ע

הגדרה: בשביל אופרטור מסויים Λ במרחב וקטורי, אזי קיימים וקטורים שאינם $\langle 0|$ שנקראים וקטורים עצמיים, ו"ע, וישנם ערכים λ שנקראים ערכים עצמיים, ע"ע, שמקיימים את הנוסחה הבאה $\Lambda|\alpha\rangle = \lambda|\alpha\rangle$

- צורות שונות לנוסחה $\Lambda|\alpha\rangle - \lambda|\alpha\rangle = 0; (\Lambda - \lambda I)|\alpha\rangle = |0\rangle$

3.4.1 מציאת ע"ע וגם ו"ע

נדרוש שהמשוואה הבאה תתקיים: $det(\Lambda - \lambda I) = 0 = \left|\Lambda - \lambda I\right|$

- השורשים של המשוואה הם הע"ע של Λ
- לכל ע"ע ישנם ו"ע שפותרים את המשוואה
- מספר הפעמים שע"ע חוזר על עצמו כפתרון למשוואה נקרא הניוון של הע"ע (ריבוי אלגברי)
- למטריצה הרמיטית או יוניטרית מספר הו"ע הבלתי תלויים (הריבוי הגאומטרי) הוא כערך הניוון של הע"ע
- במטריצה לכסינה מתקיים ריבוי גאומטרי = ריבוי אלגברי
- ע"ע של אופרטור הרמיטי הם ממשיים
- $\langle\lambda|\Lambda|\lambda\rangle = \lambda\langle\lambda|\lambda\rangle = \lambda^*\langle\lambda|\lambda\rangle$ עבור מטריצה הרמיטית!

- ע"ע של אופטור יוניטרי הם מספרים קומפלקסים עם אמפליטודה 1 כלומר מהצורה $e^{i\theta}$
- הו"ע של אופרטור יוניטרי הם אורטוגונלים, א"ג, אחד לשני
- הו"ע של אופרטור הרמיטי השייכים לע"ע שונים הם א"ג אחד לשני
- הו"ע של אופרטור הרמיטי מהווים בסיס של המרחב הוקטורי שלו
- הייצוג המטריצי של אופרטור הרמיטי Λ בבסיס המורכב מהו"ע שלו הוא מטריצה אלכסונית שאיברי האלכסון שלה הם הע"ע של Λ
- הייצוג המטריצי של אופרטור הרמיטי Λ בבסיס א"ג כלשהו $\{|i\rangle\}$ ניתן ללכסון ע"י מעבר לבסיס $\{|\lambda_i\rangle\}$ בעזרת טרנספורמציה יוניטרית שייצוגה המטריצי מכיל בעמודותיו את הו"ע של Λ בבסיס $\{|i\rangle\}$
- אם A, B הם שני אופרטורים קומוטטיביים כלומר מתקיים $[A, B] = 0$ אזי יש להם את אותם ו"ע. לכן אם הם גם הרמיטיים אז ניתן ללכסן אותם יחד באותו בסיס המורכב מהו"ע האלה